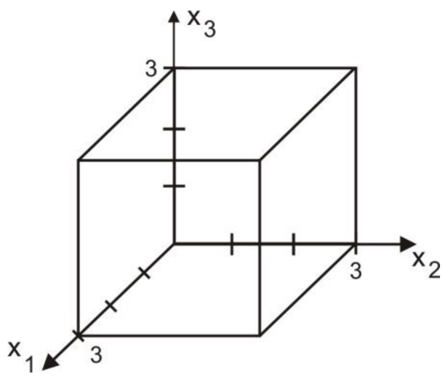
Übungsklausur Geometrie 1 (Solarkraftwerk)
Pflichtteil (ohne Hilfsmittel)

1) Gegeben ist die Gerade g durch A(1|2|4) und B(0|1|5)
   und die Gerade h durch C(1|1|1) und D(3|1|0).
   a) Gib je eine Gleichung von g und h an.
   b) Untersuche die gegenseitige Lage der Geraden g und h.
   c) Bestimme einen Wert für k, so dass P(3|k^2|k) auf der Geraden g liegt. (4VP)

2) Gegeben sind die beiden Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$.
   a) Zeige, dass die Geraden zueinander parallel, aber nicht identisch sind.
   b) Gib eine Gleichung der Ebene an, in welcher beide Geraden liegen. (3VP)

3) Gib jeweils die Koordinaten des Punktes an:
   a) Ein Punkt in der x_2x_3-Ebene.
   b) Ein Punkt der x_3-Achse.
   c) Ein Punkt, der von der x_1x_3-Ebene den Abstand 2 hat. (3VP)

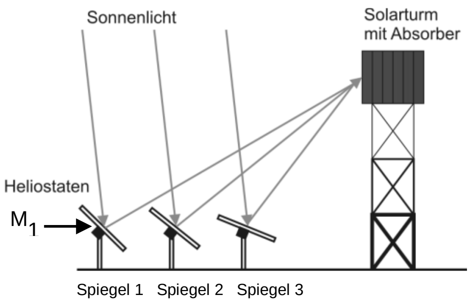
4) Nebenstehendes Bild zeigt einen Würfel mit der Kantenlänge 3.
   a) Zeichne diesen Würfel und die Ebene $E: 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 12$ unter Verwendung ihrer Spurpunkte in ein gemeinsames Koordinatensystem.
   b) Zeige, dass das aus den drei Spurpunkten gebildete Dreieck gleichschenklig ist.
   c) Kennzeichne die Schnittfläche der Ebene E mit dem Würfel.



(5VP)

Übungsklausur Geometrie 1 (Solarkraftwerk)
Wahlteil (mit WTR und Formelsammlung)

Beim Solarkraftwerk in der nebenstehenden Skizze werden Spiegel (so genannte Heliostaten) so ausgerichtet, dass sie Sonnenstrahlen in einem Punkt des Solarturmes bündeln und durch die so entstehende Wärme Strom erzeugt werden kann.
Ein Koordinatensystem sei so angelegt, dass der Mittelpunkt von Spiegel 1 die Koordinaten $M_1(-10|-20|0)$ hat. Der Sonnenstrahl, der auf den Mittelpunkt des Spiegels 1 trifft, wird



mit dem Richtungsvektor $\begin{pmatrix} 53 \\ 46 \\ 45 \end{pmatrix}$ reflektiert.

An Spiegel 2 wird der Sonnenstrahl so reflektiert, dass der reflektierte Strahl durch die Gerade

$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -10 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 24 \\ 20{,}5 \\ 22{,}5 \end{pmatrix}$ beschrieben werden kann. (Alle Angaben in Metern)

a) (1) Wie lautet die Gleichung der Geraden g, durch die der an Spiegel 1 reflektierte Strahl beschrieben werden kann?
(2) In welchem Punkt treffen die reflektierten Strahlen g und h auf den Turm?
(3) Gib eine Koordinatengleichung für die Ebene E an, in der die beiden reflektierten Strahlen g und h liegen. (5VP)

b) Spiegel 3 ist rechteckig und hat die Eckpunkte $A(3{,}9|-2{,}5|-1{,}5)$, $B(-1{,}1|4{,}5|-1{,}5)$, $C(-3{,}9|2{,}5|1{,}5)$ und $D(1{,}1|-4{,}5|1{,}5)$.
(1) Zeige, dass sein Mittelpunkt im Ursprung liegt.
(2) Insgesamt gibt es 1818 solcher gleichartiger Spiegel.
Berechne die Gesamtfläche aller Spiegel. (3VP)

c) (1) Gib eine Parametergleichung der Ebene F an, in der Spiegel 3 liegt.
(2) Zeige, dass diese Ebene auch durch die Gleichung
$F: 105x_1 + 75x_2 + 148x_3 = 0$ beschrieben werden kann.
(3) Berechne den Schnittpunkt von h mit der Ebene F und runde auf eine Nachkommastelle.
(4) Untersuche, ob der durch h beschriebene Strahl ungehindert an Spiegel 3 vorbeiläuft.
(5VP)

d) Die Spiegel werfen auf den ebenen Untergrund mit der Gleichung $x_3 = -4{,}5$ einen Schatten.
Berechne den Schattenpunkt A' der Spiegelecke A des Spiegels 3 auf diesem Untergrund,
falls die Sonnenstrahlen in Richtung des Vektors $\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix}$ einfallen. (2VP)

Übungsklausur Geometrie 1 (Solarkraftwerk)

Lösungen Pflichtteil:

1) a) $g:\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$ (0,5P) $h:\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}$ (0,5P)

b) (1): RV l. unab. (0,5P)

(I) $1-t=1+2s$ $t=1$ einsetzen: $0=1+2s \Leftrightarrow \boxed{s=-0{,}5}$

(2) (II) $2-t=1$ $\Leftrightarrow \boxed{t=1}$

(III) $4+t=1-s$

$t=1; s=-\frac{1}{2}$ in (III): $5=\frac{3}{2}$ f. A. (1P) $(1)\,\&\,(2) \Rightarrow$ g und h sind windschief. (0,5P)

c) $\begin{pmatrix}3\\k^2\\k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$ $\quad 3=1-t \Rightarrow \boxed{t=-2}$; $k^2=2-t \Rightarrow k=\pm 2$; $k=4+t \Rightarrow \boxed{k=2}$ $\quad \Rightarrow P(3|4|2)$ (1P) **4P**

2) a) Parallel: $\begin{pmatrix}-2\\6\\4\end{pmatrix}=-2\cdot\begin{pmatrix}1\\-3\\-2\end{pmatrix}$ also: $g\,||\,h$ (1P)

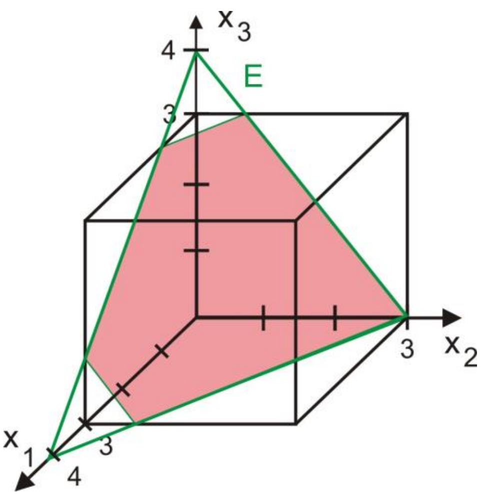
$\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\1\\-2\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}1\\-3\\-2\end{pmatrix}$ $\quad \Rightarrow r=-1$; $\Rightarrow r=\frac{2}{3}$; $\Rightarrow r=-\frac{5}{2}$ $\quad$ also $g\neq h$ (1P)

b) $E:\vec{x}=\begin{pmatrix}3\\1\\-2\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}1\\-3\\-2\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\2\\-5\end{pmatrix}$ (1P) **3P**

3) a) A(0|1|2) (Bedingung: die x_1-Koordinate muss 0 sein) (1P)
b) B(0|0|1) (Bedingung: die x_1-Koordinate und die x_2-Koordinate müssen 0 sein) (1P)
c) C(0|2|0) (Bedingung: die x_2-Koordinate muss 2 sein) (1P) **3P**

4) a) $S_1(4|0|0)$ $S_2(0|3|0)$ $S_3(0|0|4)$ und E (1,5P)
Würfel (0,5P)
b) $\left|\overrightarrow{S_1S_2}\right|=5; \left|\overrightarrow{S_2S_3}\right|=5; \left|\overrightarrow{S_1S_3}\right|=\sqrt{32}$
$\Rightarrow$ Dreieck gleichschenklig (1,5P)
c) Schnittfläche (siehe Abb.) (1,5P)

5P



Summe: 15 Punkte

Übungsklausur Geometrie 1 (Solarkraftwerk)

Lösungen Wahlteil:

a) (1) $g:\vec{x}=\begin{pmatrix}-10\\-20\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}53\\46\\45\end{pmatrix}$ (1P)

(2)
$$\begin{array}{ll}\text{(I)} & -10+53t=24s\\ \text{(II)} & -20+46t=-10+20{,}5s\\ \text{(III)} & 45t=22{,}5s\end{array}$$

Bestimme t und s mit (I) und (III): $s=2t$ in (I): $-10+53t=48t \Leftrightarrow t=2\,(\Rightarrow s=4)$

$\Rightarrow S(96\,|\,72\,|\,90)$ (2P)

(3) $E:\vec{x}=\begin{pmatrix}0\\-10\\0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}24\\20{,}5\\22{,}5\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}10\\10\\0\end{pmatrix}$ (1P)

$\vec{n}=\begin{pmatrix}-225\\225\\35\end{pmatrix}\triangleq\begin{pmatrix}-45\\45\\7\end{pmatrix}\Rightarrow E:-45x_1+45x_2+7x_3=-450$ (1P) **5P**

b) (1) Mitte zwischen A und C reicht, da ABCD rechteckig

$M\left(\frac{3{,}9+(-3{,}9)}{2}\,|\,\frac{-2{,}5+2{,}5}{2}\,|\,\frac{-1{,}5+1{,}5}{2}\right)=M(0\,|\,0\,|\,0)$ (1P)

(2) $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{5^2+7^2+0^2}=\sqrt{74}$ $\quad\left|\overrightarrow{BC}\right|=\sqrt{2{,}8^2+2^2+3^2}=\sqrt{20{,}84}$ (1P)

$A_{1\ \text{Spiegel}}=\sqrt{74}\cdot\sqrt{20{,}84}\approx 39{,}27\,m^2$

$A_{1818\ \text{Spiegel}}=1818\cdot A_{1\ \text{Spiegel}}\approx 71392{,}86\,m^2$ FE (1P) **3P**

c) (1) $F:\vec{x}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-5\\6\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-7{,}8\\5\\3\end{pmatrix}$ (1P)

(2) A(3,9|-2,5|-1,5) in E einsetzen: $105\cdot 3{,}9+75\cdot(-2{,}5)+148\cdot(-1{,}5)=0$ w.A.
B(-1,1|4,5|-1,5) in E einsetzen: $105\cdot(-1{,}1)+75\cdot 4{,}5+148\cdot(-1{,}5)=0$ w.A.
C(-3,9|2,5|1,5) in E einsetzen: $105\cdot(-3{,}9)+75\cdot 2{,}5+148\cdot 1{,}5=0$ w.A. (1,5P)

(3) h in F einsetzen:

$105\cdot 24t+75\cdot(-10+20{,}5t)+148\cdot 22{,}5t=0 \Leftrightarrow 7387{,}5t=750 \Leftrightarrow t=\frac{20}{197}$

$\Rightarrow T(2{,}4\,|\,-7{,}9\,|\,2{,}3)$ (1,5P)

Da -7,9 nicht zwischen -4,5 und 4,5 liegt (oder da 2,3 nicht zwischen -1,5 und 1,5 liegt) liegt der Schnittpunkt T von h und F nicht auf dem Spiegel 3, der Strahl läuft also ungehindert am Spiegel 3 vorbei. (1P) **5P**

d) $s:\vec{x}=\begin{pmatrix}3{,}9\\-2{,}5\\-1{,}5\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-2\\-3\\-6\end{pmatrix}$ (0,5P) in E_{Boden}: $-1{,}5-6t=-4{,}5\Leftrightarrow t=\frac{1}{2}$ (1P)

$\Rightarrow A'(2{,}9\,|\,-4\,|\,-4{,}5)$ (0,5P) **2P**

Summe: 15 Punkte